Risolvere il seguente sistema:

si tratta di logaritmi in base 10

$$\begin{cases} \log^2 x < \dfrac{2}{\log x + 1} \\ \dfrac{\log x - 1}{\log(x-1)} \le 0 \end{cases}$$

Dovresti già sapere che:

- il logaritmo esiste quando il suo argomento è maggiore di 0; pertanto:

  log x esiste quando x>0

  log(x-1) esiste quando (x-1)>0

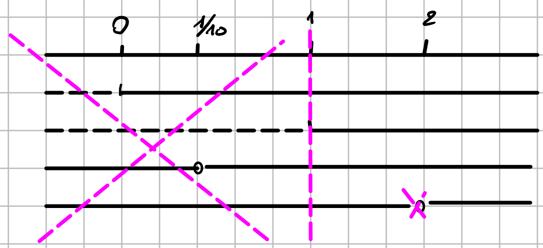
- una frazione è definita quando il suo denominatore è diverso da 0; perciò:

  log x + 1 <> 0

  log(x-1) <> 0

Allora il campo di esistenza è determinato dal seguente sistema di disequazioni

$$\begin{cases} x > 0 \\ x - 1 > 0 \\ \log x + 1 \ne 0 \\ \log(x-1) \ne 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x > 1 \\ \log x \ne -1 \\ x - 1 \ne 10^0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x > 1 \\ x \ne 10^{-1} \ (1/10) \\ x \ne 2 \end{cases}$$



poichè é un sistema, le condizioni devono essere soddisfatte contemporaneamente

Questo vuol dire che deve essere x>1 e x<>2

Risoluzione della prima disequazione del sistema $\log^2 x < \dfrac{2}{\log x + 1}$

ponendo z=log x si ottiene:

$$z^2 < \frac{2}{z+1} \Rightarrow z^2 - \frac{2}{z+1} < 0 \Rightarrow \frac{z^2(z+1) - 2}{z+1} < 0 \Rightarrow \frac{z^3 + z^2 - 2}{z+1} < 0$$

Si tratta di una disequazione fratta il cui numeratore è di terzo grado non fattorizzabile in modo immediato.

Per fortuna c'è Ruffini che ci viene in aiuto con il suo teorema: infatti se sostituiamo alla z=1, il polinomio si annulla, equesto implica che il numeratore è divisibile per z-1

Usiamo il metodo di Ruffini:

coefficienti del polinomio di partenza

	1	1	0	-2
1		1	2	+2
	1	2	2	0

radice del polinomio

coefficienti del polinomio risultante datta divisione

oppure eseguiamo la divisione:

$$\begin{array}{rrr|l} z^3 + z^2 & & -2 & z-1 \\ -z^3 + z^2 & & & \hline z^2 + 2z + 2 \\ \hline / \ 2z^2 & & -2 & \\ -2z^2 & +2z & & \\ \hline / & +2z & -2 & \\ & -2z & +2 & \\ \hline & / & / & \end{array}$$

Perciò:

$z^3 + z^2 - 2 = (z-1)(z^2 + 2z + 2)$ e di conseguenza la disequazione diventa:

$$\frac{z^3 + z^2 - 2}{z+1} < 0 \Rightarrow \frac{(z-1)(z^2+2z+2)}{z+1} < 0$$

Questa sappiamo risolverla in pochi passi

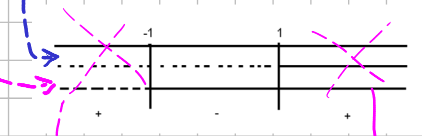
✓ Il trinomio a numeratore è trascurabile poichè sempre positivo (infatti il suo delta è -4 <0 eil suo primo coefficiente è positivo)

bisogna perciò studiare solo gli altri due termini:

$z - 1 > 0 \Rightarrow z > 1$

$z + 1 > 0 \Rightarrow z > -1$

Mettiamo sul grafico per determinare il segno complessivo:



ambedue negativi:
nel complesso positivi

ambedue positivi:
nel complesso positivi

Noi vogliamo che la disequazione fratta sia negativa; questo avviene per

-1 < z < 1

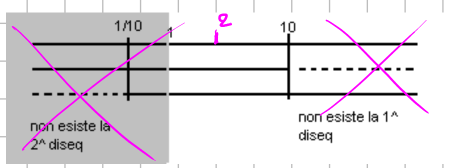
ricordando che z=log x e sostituendo avremo:

$\boxed{-1 < \log x < 1}$ che vuol dire risolvere il seguente sistema

$$\begin{cases} \log x < 1 \\ \log x > -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < 10 \\ x > \dfrac{1}{10} \end{cases}$$

dopo essere passati agli esponenziali in base 10

Mettiamo sul grafico e prendiamo le parti in cui
le due disrquazioni sono soddisfatte contemporaneamente



per il campo di esistenza

quindi la prima disequazione è soddisfatta per

$\boxed{1 < x < 10 \quad e \quad x <> 2}$

Risoluzione della seconda disequazione del sistema

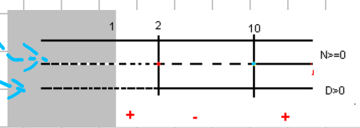
$$\frac{\log x - 1}{\log(x-1)} \le 0$$

Studiamo separatamente il segno del numeratore e del denominatore;

Per il numeratore: $\log x - 1 \ge 0 \Rightarrow \log x \ge 1 \Rightarrow \boxed{x \ge 10}$

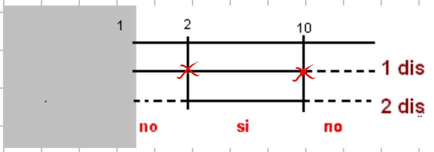
Per il denominatore: $\log(x-1) > 0 \Rightarrow x - 1 > 10^0 \Rightarrow x - 1 > 1 \Rightarrow \boxed{x > 2}$

Costruiamo il grafico per lo studio del segno dell'espressione fratta
(la zona ombrata indica l'intervallo dove l'espressione non esite):



L'espressione fratta risulta dunque negativa o nulla nell'intervallo $\boxed{2 < x <= 10}$

E finalmente itorniamo allo studio delle soluzioni del sistema iniziale:



$1 < x < 10$ e $x <> 2$

$2 < x <= 10$

Poichè si tratta di un sistema, ci interessano le parti del grafico in cui le disequazioni sono contemporaneamente soddisfatte

$$\boxed{2 < x < 10}$$